Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete)

An effect of the didactical contract: Imagining implicit requirements (even in problems that involve real concrete situations)

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1]*Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2]*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Alla ricerca hanno collaborato: Anna Angeli, Mariamonica Cappelli, Margherita Francini, Ines Marazzani, Annarita Monaco e Malvina Nurrito.

Abstract. *In this text, we present an effect that, in our opinion, has not been yet pointed out in the studies regarding the didactical contract. We carried out a recent research on this effect in Italy that involved teachers and grade 5 students. The effect stems from imagining requirements, which do not exist, based on explicit or implicit agreements regarding the meaning of school problem and its text. We will call this effect: "imagining implicit requirements". The examples we propose are linked to the concreteness of real situations, even though this is hardly ever recognized. Such a state of affairs allows us to draw some remarks concerning the so-called "authentic tasks", a term that appears in ministerial documents and the Italian didactical practice.*

Keywords: didactical contract, effect, authentic tasks, problem-solving, text problem interpretation.

Sunto. *In questo testo si presenta un effetto a nostro avviso mai segnalato negli studi sul contratto didattico, effetto che è stato oggetto di una recente ricerca compiuta in Italia su insegnanti e su allievi di V primaria. L'effetto scaturisce dall'immaginare obblighi, che in realtà non esistono, basati su accordi espliciti o impliciti relativi al significato di problema scolastico e al suo testo. Lo chiameremo: "immaginare obblighi impliciti". Gli esempi proposti sono legati alla concretezza di situazioni reali, anche se ciò non viene quasi mai riconosciuto, il che ci consente alcune considerazioni relative ai cosiddetti "compiti di realtà" la cui denominazione appare in documenti ministeriali e nella pratica didattica in Italia.*

Parole chiave: contratto didattico, effetto, compiti di realtà, problem solving, interpretazione dei testi dei problemi.

Resumen. *En este texto presentamos un efecto que creemos no se ha puesto en evidencia en los estudios sobre el contrato didáctico, un efecto que ha sido objeto de una investigación reciente llevada a cabo en Italia en la cual participaron profesores y estudiantes del quinto grado de primaria. El efecto se deriva al imaginar obligaciones, que en realidad no existen, basadas en acuerdos explícitos o implícitos relacionados con el significado del problema escolar y de su planteamiento. Lo llamaremos: "imaginar obligaciones implícitas". Los ejemplos presentados están relacionados con la concreción de situaciones reales, también si esto casi nunca se reconoce, lo que nos permite hacer algunas consideraciones relacionadas con las llamadas "tareas de realidad" cuyo nombre aparece en los documentos ministeriales y en la práctica docente en Italia.*

Palabras clave: contrato didáctico, efectos, tareas cotidianas, problem solving, interpretación del texto de un problema.

1. Il contratto didattico

Quando si cerca di datare la comparsa ufficiale dell'idea di "contratto didattico" nel mondo della ricerca, in quella che poi, negli anni '80, verrà chiamata *didattica della matematica* (DdM), si cade in una difficoltà non banale. Il problema è dovuto al fatto che le prime pubblicazioni su questo tema avvennero in modo frammentario, su testi a volte solo ciclostilati, in occasione di incontri non del tutto ufficiali, il più delle volte privi di Atti, o su riviste spesso poco legate alla matematica e alla sua didattica. Abituati come siamo oggi a riviste specialistiche perfettamente organizzate e ad Atti di convegni precisamente citabili, facciamo fatica anche solo a rintracciare i testi originali su questo tema.

Ma la storia è talmente nota e l'argomento talmente conosciuto che ci esimeremo dal trattarne ancora; accetteremo come fanno in molti il 1986 come l'anno del tentativo di definire questo tema di analisi e ricerca da parte del suo geniale ideatore (Brousseau, 1986), anno che dà il via ufficiale alla DdM modernamente intesa.

Proprio questa datazione così lontana nel tempo (quasi 40 anni) fa sì che alcuni principianti poco colti o alcuni detrattori superficiali spesso in malafede considerino questo argomento come superato (per un'analisi critica su questo punto si veda: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

Noi vogliamo invece difendere la posizione seguente: così come in matematica accade spesso che temi classici siano da rivedere e rinvigorire per mostrarne la sempre viva potenza scientifica, lo stesso accade anche in DdM (si vedano, per esempio, D'Amore & Fandiño Pinilla, 2018a, b).

Proporremo dunque in questo scritto un'analisi-ricerca compiuta fra il 2018 e il 2019, consapevoli del fatto che l'idea di contratto didattico non sia ancora del tutto conosciuta, di come spesso la si citi in maniera impropria o sbagliata, solo per sentito dire, di come a volte sia difficile definirla e determinarla e di come ci sia ancora bisogno di ricerca sperimentale dato che, come dice e scrive lo stesso Guy Brousseau, a fronte dell’incredibile successo planetario di questa idea negli anni ’80 e ’90, la vera ricerca empirica esplicita su questo tema è relativamente scarsa (Narváez Ortiz, 2017, p. 184). Tanto è vero che riteniamo necessario che ancora vi siano ricerche a carattere dottorale su questo tema (Narváez Ortiz, 2017) e che, dovendo indicare ai neofiti che cosa studiare in proposito, preferiamo citare testi recenti (D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018) piuttosto che quelli classici degli anni ’80 o primi ’90 (a loro volta ivi citati con dovizia di particolari).

2. I “compiti di realtà”

Vi è un’ulteriore tema che vogliamo illustrare qui brevemente e che gioca un ruolo interessante nient’affatto marginale in questa nostra ricerca.

Nella prassi didattica italiana si parla da alcuni anni, con una terminologia oramai diffusa che non possiamo che accettare, anche se ci appare poco elegante, dell’idea di “compiti di realtà” (cdr). Essa è delineata per esempio all’interno della Circolare MIUR 13.02.2015, n. 3: “Adozione sperimentale dei nuovi modelli nazionali di certificazione delle competenze nelle scuole del primo ciclo di istruzione”; e in particolare nell’allegato: “Linee guida per la certificazione delle competenze nel primo ciclo di istruzione” (MIUR, 2015). All’interno del paragrafo 2.5 (“Gli strumenti per valutare le competenze”), si trova scritto:

> È ormai condiviso a livello teorico che la competenza si possa accertare facendo ricorso a compiti di realtà (prove autentiche, prove esperte, ecc.), osservazioni sistematiche e autobiografie cognitive. I compiti di realtà si identificano nella richiesta rivolta allo studente di risolvere una situazione problematica, complessa e nuova, quanto più possibile vicina al mondo reale, utilizzando conoscenze e abilità già acquisite e trasferendo procedure e condotte cognitive in contesti e ambiti di riferimento moderatamente diversi da quelli resi familiari dalla pratica didattica. Pur non escludendo prove che chiamino in causa una sola disciplina, si ritiene opportuno privilegiare prove per la cui risoluzione l’alunno debba richiamare in forma integrata, componendoli autonomamente, più apprendimenti acquisiti. La risoluzione della situazione-problema (compito di realtà) viene a costituire il prodotto finale degli alunni su cui si basa la valutazione dell’insegnante. (p. 7)

I problemi che si vogliono ascrivere alla categoria cdr, dunque, non dovrebbero essere quelli usuali da tempo immemorabile proposti agli allievi di scuola primaria [in generale, più esercizi che problemi (Fandiño Pinilla, 2008, pp. 66–71)], ma problemi “veri” che propongono situazioni vicine alla realtà o descrittive di un qualche aspetto della realtà nelle quali l’allievo deve agire con scelte proprie, usando sì gli strumenti della matematica, ma intervenendo sulla realtà concreta della situazione problematica, più che sulle sue apparenze standard; cioè non facendo uso solo di scelte stereotipate e algoritmi, ma mettendo in gioco la propria interpretazione personale della situazione problematica descritta dal testo.

3. Le nostre proposte di problemi aventi a che fare con il contratto didattico e con i "compiti di realtà"

Abbiamo ideato i seguenti tre testi di problemi da proporre a fine scuola primaria; nel loro complesso, il lettore vedrà fra poco perché li abbiamo denominati in genere "Che cosa conviene fare".[1]

Problema 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Problema 2.

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro. Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

Problema 3.

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte e due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa [Figura 1]. *Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:*

- *la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;*
- *la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.*

[1] Per correttezza, dichiariamo che il primo testo ci è stato ispirato dalla lettura dell'articolo Knijnik (2018); in tale articolo quel testo aveva tutt'altro scopo.

Figura 1. Mappa del problema 3.

Quale percorso conviene fare a Pierino?[2]

Facciamo notare esplicitamente che abbiano deciso di non far uso di numeri con la virgola, che pure sono trattati nella V primaria italiana, per non rendere inutilmente difficoltosi i problemi, dato che il nostro interesse era quello di esaminare le modalità di risoluzione dei problemi stessi e non la capacità nell’impostare le risoluzioni. Dunque tutti i numeri che appaiono nei tre testi sono naturali.

Prima di procedere e affinché il seguito del nostro testo abbia maggior senso, invitiamo il lettore a soffermarsi sui testi precedenti, dando la propria risposta e annotandosela a parte, meglio se accompagnata da alcuni appunti sulle motivazioni che lo hanno portato a darla. Gli appunti personali servono a non dimenticare quale è stata la prima reazione-risposta personale data in

[2] Il disegno, in varie forme, dimensioni e colori, è opera del disegnatore professionista Michele Bosco, che ringraziamo per la collaborazione.

modo spontaneo a tali problemi.

Nel par. 4 faremo alcune considerazioni di natura didattica concreta relative a qualcosa che chiameremo "tipologia dei problemi di matematica" tipici della scuola primaria, desumendole da colloqui con i docenti di scuola primaria e da risposte date a precedenti esperienze di ricerca. Nel par. 5 proporremo l'analisi dei testi oggetto della ricerca. Nel par. 6 presenteremo le domande cui si vuole dare risposta con la ricerca. Nel par. 7 illustreremo la metodologia di ricerca. Nel par. 8 esporremo i risultati della ricerca. Nel par. 9 formuleremo le risposte alle domande di ricerca. Nel par. 10 presenteremo alcuni esempi di protocolli con brevi commenti. Nel par. 11 trarremo alcune conclusioni.

4. Il problema della tipologia dei problemi d'aula

In D'Amore e Fandiño Pinilla (2013) proponiamo alcune considerazioni fatte da docenti di scuola primaria relativamente a quelle che sono state individuate da essi come tipologie di "problemi attesi" e considerati "tipici" della prassi scolastica. In tale testo si esaminano alcuni risultati ottenuti nelle prove Invalsi destinate agli studenti delle classi quinte di scuola primaria nell'anno scolastico 2008–2009; in particolare si esamina la seguente proposta:

> D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?
>
> □ A. Renata.
>
> □ B. Fabio.
>
> □ C. Maria.
>
> □ D. Non si può sapere.

Circa il 50% degli studenti dà la risposta attesa (C); dunque, per converso, circa il 50% *non* la dà. Nell'esaminare possibili cause di questa mancata risposta, abbiamo naturalmente chiesto ai docenti di scuola primaria una loro spiegazione. La più ricorrente è stata quella che, espressa in vari modi, verrà da noi citata qui di seguito esattamente così esplicitata da un docente in maniera molto significativa (la possiamo considerare assai condivisa): "Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste [sottointeso: prove] e loro non le riconoscono" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013, p. 44).

Così commentavamo in quello stesso articolo: "Dunque, esistono 'situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti' e 'situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese' (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013, p. 44).

In base a ciò, dunque, il contratto didattico non è solo creato da ripetizioni nei modi di fare dei docenti, ma appositamente istituito in una sorta di accordo talvolta esplicito o quasi: Tu impara a risolvere i problemi fatti così e così; il tuo impegno verrà premiato perché io ti darò sempre e solo problemi fatti così e così.

L'allievo NON impara a risolvere problemi dunque, impara solo a ripetere in modo automatico modalità concordate con il docente. Anzi, è autorizzato a non sapere come impegnarsi in una risoluzione, quando il problema non è della tipologia concordata.

Non commentiamo questa situazione perché ci pare che non ne valga la pena; d'altra parte rientra nelle casistiche tipiche studiate nel contratto didattico. Ma mettiamo in evidenza questi fatti per spiegare il perché, nel voler effettuare prove su testi problematici, abbiamo voluto dar loro la parvenza di testi che rientrino nella categoria di quelli concordati:

- dati numerici, domanda esplicita, scelta di un'operazione molto evidente da eseguire,
- esecuzione dell'operazione, risposta alla domanda del problema.

Il nostro scopo di ricerca, infatti, non voleva essere la capacità di risolvere problemi, ma l'analisi del ruolo che gioca un nuovo effetto del contratto didattico, che rivela come il solutore creda di ravvisare obblighi non detti nel testo del problema nonostante il testo del problema spinga a dare una risoluzione non contrattuale. Chiameremo questo effetto: "immaginare obblighi impliciti".

5. Analisi dei testi sulla base del contratto didattico e dell'idea di "compito di realtà"

5.1. Il contratto didattico

Prima di affrontare la ricerca vera e propria, com'è nostra usuale abitudine, abbiamo eseguito alcune pre-prove empiriche, i cui risultati non abbiamo incluso nella presentazione dei risultati finali, solo per saggiare e poi opportunamente modificare i testi dei problemi da proporre.

Abbiamo avuto ampio riscontro dei seguenti fatti, che evidenzieremo, legati a questioni attinenti all'effetto "immaginare obblighi impliciti".

5.1.1. Problema 1

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

La risposta che ci sembrava più accettabile sul piano concreto e logico dal punto di vista reale è la seguente (o una analoga):

Risoluzione 2 (creativa)

A Nonna Rosa conviene comprare i 2 kg di albicocche nel banco B e i 3 kg di pesche nel banco A; in tal modo spenderà: $3 \times 1 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5€$.

Ma la risposta che ritenevamo sarebbe stata quella più proposta è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)

Spesa in A: $2 \times 2 + 1 \times 3 = 4 + 3 = 7€$

Spesa in B: $1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8€$

Siccome 8 > 7, conviene fare la spesa nel banco A.
Nonna Rosa spenderà 7 €.

La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; per abitudine ripetuta, per supposta attesa da parte dell'insegnante, il risolutore sarà portato a non prendere in esame la possibilità che la spesa possa avvenire in due banchi di frutta diversi. La domanda del problema 1 recita:

- *Come* è più conveniente fare l'acquisto?

ma il risolutore tenderà a interpretarla come segue, per abitudine contrattuale:

- *Dove* è più conveniente fare l'acquisto?

Non si tratta di una forma usuale del manifestarsi del contratto didattico, ma di una sua forma più subdola, nascosta tra le pieghe delle norme stabilite relativamente alla tipologia di problemi proposti e attesi. Ci pare che questa risposta sia legata a quell'effetto che chiamiamo "immaginare obblighi impliciti". Qui l'obbligo implicito è quello che sembra emergere da accordi impliciti: "si *deve* effettuare la spesa nello stesso negozio" che sembra a sorpresa caratterizzare l'idea stessa di problema. Lo ritroveremo in modo esplicito nelle risposte date al problema 1.

5.1.2. Problema 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

La risposta che ci sembra più accettabile sul piano concreto e logico dal punto di vista reale sembra essere la seguente o una analoga:

Risoluzione 2 (creativa)

Al signor Gigino conviene comprare un barattolo da 4 litri nel negozio A e 2 barattoli da 3 litri nel negozio B; in tal modo spenderà:
$18 \times 1 + 15 \times 2 = 18 + 30 = 48€$.

Ma la risposta che ritenevamo sarebbe stata quella più proposta è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)

Spesa in A - Per avere 10 litri deve comprare 3 barattoli: $18 \times 3 = 54$ €

Spesa in B - Per avere 10 litri deve comprare 4 barattoli: $15 \times 4 = 60$ € .

Siccome 60 > 54, conviene comprare la vernice nel negozio A.
Il signor Gigino spenderà 54 €.

La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; per abitudine ripetuta, per supposta attesa da parte dell'insegnante, il risolutore sarà portato a non prendere in esame la possibilità che l'acquisto possa avvenire in mesticherie diverse. La domanda del problema 2 recita:

- *Come* gli conviene compare la vernice?

ma il risolutore tenderà a interpretarla come segue, per abitudine contrattuale:

- *Dove* gli conviene compare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

Non si tratta di una forma usuale del manifestarsi del contratto didattico, ma di una sua forma più subdola, nascosta nel testo e negli accordi stabiliti in aula relativi alla tipologia di problemi proposti e attesi. Non ripetiamo le frasi finali già scritte in 5.1.2.

5.1.3. Problema 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte e due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

- *la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;*
- *la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.*

[Segue il disegno].

Quale percorso conviene fare a Pierino?

La risposta che ci sembra più accettabile sul piano concreto e logico, una volta esaminata la mappa messa a disposizione, sembra essere la seguente o una analoga:

Risoluzione 2 (creativa)

A Pierino conviene percorrere prima il primo tratto di via Garibaldi fino alla rotonda e poi il secondo tratto di via Roma, dalla rotonda fino a casa di Camilla. Lunghezza totale del percorso: $200 + 100 = 300\,\text{m}$.

Ma la risposta che pensiamo potrebbe essere proposta con grande maggioranza è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)

Lunghezza totale via Garibaldi: $200 + 800 = 1000\,\text{m}$

Lunghezza totale via Roma: $750 + 100 = 850\,\text{m}$

Siccome 850 < 1000, a Pierino conviene scegliere di percorrere via Roma.

Si potrebbe riportare qui per la terza volta la frase precedentemente ripetuta due volte in modo quasi identico: La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; …

Ma questa volta c'è una variabile didattica che potrebbe giocare un ruolo fondamentale, il disegno. Potrebbe questo modificare la situazione e avere un ruolo più coinvolgente (positivo) del contratto didattico (negativo)? Cioè: potrebbe avere più potere decisionale l'analisi della mappa che non il contratto didattico?

Altra variabile didattica: il colore del disegno; se i colori vivaci della prova potrebbero ingannare il solutore, la cartina monocromatica potrebbe aiutare? Anzi, potrebbe essere la causa di un ripensamento?

5.2. Il "compito di realtà"

Nella descrizione dei cdr e del loro ruolo educativo, come abbiamo visto, si auspica sempre che tali testi si richiamino alla realtà "vera", quella quotidianamente vissuta dagli allievi o vicina a essa o facilmente a essa rinviabile per esperienza diretta o indiretta.

I nostri tre testi seguono questa indicazione molto più di tanti cdr che si propongono agli allievi nelle riviste, nei libri di testo, nelle raccolte suggerite come modelli agli insegnanti.

Se le risposte di tipo contrattuale precedenti (risoluzioni 1) dovessero davvero prevalere, allora bisognerebbe ripensare all'idea stessa di cdr; bisognerebbe introdurre come attività concrete testi come i nostri, l'ideatore dei quali abbia almeno idea di che cosa sia il contratto didattico e facendo riferimento allo storico-classico dibattito (evidentemente ancora necessario e vivo) fra "problema scolastico" e "problema reale" (Boero, 1986). Di fatto, ripetiamo, molti dei testi attualmente proposti come cdr nulla hanno a che fare con il reale-reale.

Va detto per chiarezza che, secondo la normativa della scuola italiana e secondo l'interpretazione diffusa circa la pratica dei cosiddetti cdr, l'attività degli studenti in tale contesto non deve avvenire in maniera isolata, singola; il lavoro scolastico relativo ai cdr, dunque, deve avvenire in gruppo (o almeno in coppia) e può essere condotto sotto la guida dei docenti, ma anche di altri studenti più adulti o coetanei, tutor, genitori, esperti esterni (così si evince, per esempio, da: https://it.wikipedia.org/wiki/Compito_autentico).

Dunque, i cosiddetti cdr non devono essere svolti in modo autonomo; essi devono proporre invece attività da svolgersi secondo modalità che costituiscano occasione di discutere, organizzare e pianificare risoluzioni, discutere, situazioni concrete reali, simulare la realtà e trattarla con strumenti matematici.

Ma nella nostra ricerca la funzione dei 4 problemi (che potrebbero costituire di per sé esempi di problemi della tipologia cdr) non era quella tipica della strategia cdr; essi sono stati considerati da noi testi prototipici che illustrano situazioni concrete reali, specifiche dei cdr, ma che venivano proposti in situazioni individuali di ricerca per osservare dell’altro, e cioè come lo studente affronta i problemi stessi, rivelando un effetto del contratto didattico.

Dunque, nella nostra ricerca non si studiano modalità di proposta dei cdr, ma solo un nuovo effetto del contratto didattico; anche se i risultati della ricerca ci spingeranno ad alcune considerazioni didattiche sul senso dei cdr.

6. Domande di ricerca

Elenchiamo le domande alle quali la nostra ricerca vuole dare risposta.

D1. I docenti sono più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativo)? I docenti ritengono che la riposta 1 sia più corretta, consona, logica della 2? Perché? Se, discutendo eventualmente con il collaboratore alla ricerca, concordano sul fatto che sia più consona alla domanda la risposta 2 piuttosto della 1, faranno ricorso all’idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta?

D2. Nei problemi 1 e 2, qual è la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi? Nei commenti degli allievi, alcuni di essi metteranno in evidenza le differenze fra le risposte 1 e le 2? Se sì, con quali motivazioni? Appare tra queste ultime qualcuna che si possa ascrivere alla ineluttabilità del comportamento scolastico che segue il contratto didattico? Si è deciso di non fare interviste, ma di accettare comunque il colloquio con gli allievi che lo propongano spontaneamente.

D3. Se ci sono, quali sono le specificità, nei sensi precedenti, del problema 3 rispetto ai precedenti? La risposta 1 è più presente rispetto a quanto avvenuto nei problemi 1 e 2? Se sì, perché?

D4. Nel testo del problema 3 è fornita una mappa della situazione descritta nel testo; ci sono due versioni dal punto di vista cromatico: una mappa di colori diversi (come quella vista all’inizio di questo testo) e una monocromatica (come quella che segue). Chiameremo problema 4 il problema 3 nel quale il testo si mantiene identico ma la mappa proposta è in bianco e nero (Figura 2). Abbiamo ipotizzato che il colore unico utilizzato per contrassegnare le due strade possa avere più influenza nel far scegliere all’allievo la risposta 2 (creativa) piuttosto che la 1 (contrattuale); cioè abbiamo ipotizzato che le risposte di tipo 2 siano più presenti nel disegno monocromatico. Corrisponde questa ipotesi a verità empirica statisticamente significativa?

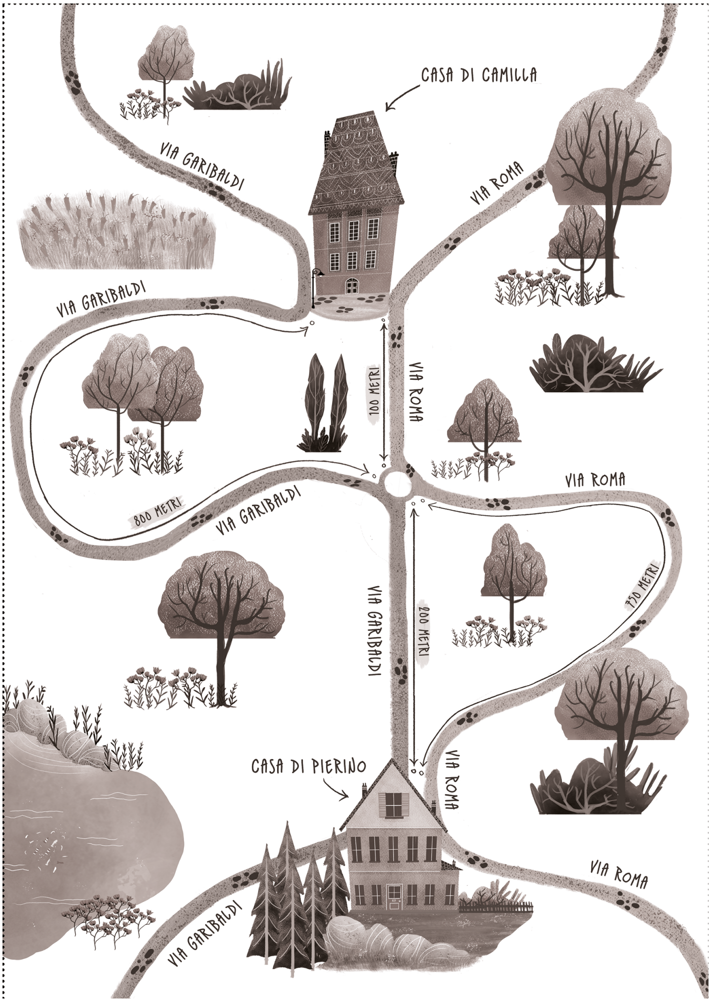


Figura 2. Mappa del problema 3 proposta in bianco e nero.

D5. Ad alcuni allievi vengono proposti i problemi in diversi ordini; ad alcuni allievi viene proposto come primo il problema 4 (cioè quello nella versione monocromatica), e poi uno solo dei o entrambi i problemi 1 e 2. Nel caso in cui al problema 4 lo studente dia la risposta 2 (creativa), questo modifica le risposte ai problemi 1 e 2, rispetto a quel che propongono gli altri allievi? Cioè: lo studente ripensa alle risposte date ai problemi 1 e 2, passando da risposte di tipo 1 (contrattuale) a risposte di tipo 2 (creativo)? Quali ipotesi si possono fare al riguardo? Si può pensare a una "rottura del contratto didattico" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018)?

D6. In seguito a esperienze compiute nelle loro classi, ci sono docenti che accettano i problemi proposti come cdr più vicini al concetto di realtà? O ci sono posizioni negative in merito? Riconosce il docente che l'interpretazione della domanda dei problemi 1 e 2 ha a che fare con l'idea di realtà?

D7. In generale, qual è l'atteggiamento del docente nei confronti di problemi di questo tipo? Vengono rilevate convinzioni specifiche a questo proposito? Cita spontaneamente contratto didattico e cdr? Appaiono posizioni come quelle descritte in 4.: "… Noi li abituiamo a un certo tipo di problemi …"?

D8. Dalle risposte alle domande di ricerca D1-D7, si può concludere l'esistenza di un effetto del contratto didattico che possiamo chiamare "immaginare obblighi impliciti"?

7. Metodologia della ricerca

Descriveremo di seguito le fasi nelle quali si è sviluppata la presente ricerca; premettiamo un cenno relativo alla metodologia generale seguita; dopo di che diremo qualcosa di più specifico in particolare su ciascuna fase.

La nostra metodologia di ricerca rientra nel vasto dominio di quella che viene chiamata, oramai da decenni, una "ricerca qualitativa"; ci esimiamo dal descriverne le caratteristiche, dato che in Iori (2015, pp. 92–162) ciò è fatto in modo estremamente preciso e assai dettagliatamente documentato e non riteniamo di dover ripercorrere i passi già seguiti da questa ricercatrice.[3] In questa tesi, alle pagine 92–162, vengono esposte in maniera estremamente efficace, completa e precisa le basi della ricerca qualitativa; a quelle pagine noi ci ispiriamo e a esse rimandiamo per una dettagliata analisi della nostra metodologia in generale. Tuttavia, come abbiamo già anticipato, diciamo qualcosa in più in modo specifico per ciò che riguarda le singole fasi nelle quali si è strutturata la nostra ricerca. La ricerca si è sviluppata seguendo le fasi successivamente descritte.

Fase 1: Risoluzione dei problemi da parte dei ricercatori.

I ricercatori stessi sono stati invitati a risolvere per iscritto i problemi 1, 2 e successivamente 1, 2 e 3 (con immagine a colori); essi non avevano in origine alcuna informazione sulla ricerca. Queste risposte entrano a far parte dei materiali della ricerca come "prodotto 1" e saranno commentate successivamente dagli autori come "risultati della ricerca" (par. 8).

Dopo aver consegnato le proprie risoluzioni ai problemi oggetto della ricerca, ai ricercatori è stato inviato un breve testo nel quale si spiegavano loro le motivazioni della ricerca in dettaglio, in modo tale che fossero informati sugli obiettivi della ricerca stessa. Questa fase risponde ad alcuni requisiti

[3] Facciamo riferimento alla sua tesi dottorale: *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*, sostenuta nel 2015 presso il dottorato di ricerca in Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica, Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Palermo, avendo come direttore di tesi il prof. Aldo Brigaglia e come co-direttore uno degli autori del presente articolo. Citiamo due pubblicazioni della stessa autrice (Iori, 2017, 2018), realizzate a seguito della tesi.

enunciati da Jaworski (1998):

> Il processo di costruzione è stato visto come un adattamento delle loro conoscenze esistenti (derivanti da precedenti esperienze) per accogliere nuove esperienze. Questa posizione costruttivista implicava che un insegnante non potesse *dare* conoscenze matematiche agli studenti: l'insegnamento doveva essere visto come qualcosa di più di un semplice trasferimento di conoscenze.[4] (Jaworski, 1998, p. 113)

Jaworski fa riferimento agli studenti, ma noi interpretiamo questa frase in riferimento a tutti coloro che sono impegnati nella ricerca, dunque, in primis, ai ricercatori. Dare non solo agli insegnanti coinvolti ma agli stessi ricercatori l'occasione per impegnare sé stessi nella ricerca in qualità di soggetti indagati, per cogliere gli aspetti di novità rispetto all'ordinario lavoro di aula, ci sembra offrire l'opportunità di mettersi in gioco per "accogliere nuove esperienze", vivere il tema della ricerca sulla propria esperienza di docenti, sul proprio vissuto, evidenziare che non si tratta solo di trasmettere conoscenze (in fondo è a questo che si aspira sempre), ma viverle come faranno in una fase successiva prima alcuni colleghi e poi gli allievi.

Va notato come, più in generale, questa ricerca si debba interpretare come di carattere qualitativo dal punto di vista epistemologico:

> La ricerca qualitativa (...) esplora le caratteristiche e le circostanze uniche che caratterizzano un caso particolare. Tuttavia, lo scopo non è evidenziare l'unicità e la stranezza del caso. Si tratta di esplorare la ricchezza di un particolare che possa servire come esempio di qualcosa di più generale. (Ernest, 1998, p. 34)[5]

Fase 2: Risoluzione dei problemi da parte di docenti di scuola primaria.

A 38 docenti di scuola primaria sono stati sottoposti i problemi 1, 2 e 3 (con immagine a colori) con l'invito a risolverli uno per uno e a scrivere nello stesso foglio eventuali commenti. I ricercatori erano presenti durante la fase di risoluzione ma erano tenuti a non fare alcun commento né dare risposta alcuna alle eventuali domande concrete-operative da parte dei docenti sottoposti alla prova, durante la fase di risoluzione. Solo alla fine della prova, potevano raccogliere eventuali commenti e rispondere a eventuali domande.

Come già evidenziato in D'Amore e Fandiño Pinilla (2005), si è rivelato importante nel corso di varie ricerche, quando si indagano atteggiamenti, consuetudini e attività cognitive degli allievi, verificare quali siano le convinzioni, gli atteggiamenti e le consapevolezze dei docenti su questi stessi temi, dato che, spesso, quel che viene riscontrato nelle risposte degli allievi ha radici nelle convinzioni dei docenti (Fandiño Pinilla, 2011). In quella ricerca del 2005 si sfruttò una metodologia di ricerca che definimmo "a cascata": prima si compie la verifica sui ricercatori impegnati, poi sui docenti coinvolti

---

[4] Traduzione nostra.
[5] Traduzione nostra.

e solo alla fine sugli allievi. Questo legame (conoscenze degli allievi – convinzioni dei docenti) è stato da noi mostrato in forma assai esplicita anche in una ricerca specifica (Arrigo et al., 2009).

Fase 3: Risoluzione dei problemi da parte di allievi di V primaria.

Gli allievi sottoposti alla prova o non erano allievi dei docenti sottoposti alla prova della Fase 2, oppure la prova avveniva senza che il docente avesse avuto nel frattempo alcun genere di contatto con essi, per esempio la prova avveniva immediatamente dopo la Fase 2 e il docente di classe non era in aula.

All’80% degli allievi di ogni classe venivano dati da risolvere i problemi 1, 2 e 3 (immagine a colori) in questo ordine. Al 20% di questi allievi veniva sottoposto alla fine anche il problema 4 (cioè il problema del percorso nella versione in bianco e nero) per verificare se ci fossero ripensamenti relativi alle risoluzioni proposte in precedenza.

Al 20% degli allievi delle stesse classi venivano dati da risolvere i problemi 4 (immagine monocromatica), 1 e 2 in questo ordine. Al 20% di questi allievi veniva dato anche il problema 3, talvolta prima del 4, talvolta fra 1 e 2, talvolta alla fine.

Tutti gli allievi erano invitati a risolvere i problemi sempre e solo per iscritto e a scrivere eventuali osservazioni sotto le risoluzioni, nello stesso foglio.

Non è escluso che i ricercatori potessero intrattenere colloqui informali con qualcuno degli allievi, ma mai sollecitati dall’adulto, bensì solo se gli allievi li avessero proposti. I nostri collaboratori presenti alle prove trascrivevano esplicitamente brani salienti di alcuni di questi colloqui. I risultati di questi colloqui venivano da noi assunti solo come ulteriori informazioni non strutturate per aiutare nell’interpretazione delle tipologie di risposte date per iscritto.

Si tratta della fase più interessante e significativa; la raccolta oggettiva senza influenza esterna dei dati da analizzare è raccomandata abbondantemente da tutta la letteratura sulle metodologie di ricerca non solo in DdM; l’allievo, soggetto della ricerca, era solo di fronte ai problemi ai quali era invitato dal ricercatore a dare una risposta; la dava senza relazioni esterne (né con il ricercatore, né con il suo docente, né con altri docenti, né con i propri compagni), la situazione migliore dal punto di vista oggettivo per il tipo di ricerca che volevamo condurre. Non era prevista alcuna valutazione di tipo “scolastico”, solo la nostra di ricerca, e l’allievo ne era reso consapevole; non erano prescritti tempi da rispettare nel senso che il ricercatore dichiarava esplicitamente alla classe che non c’era un tempo limite di consegna né altre norme. Dunque, le norme che ogni allievo metteva in campo nel corso del suo impegno personale dipendevano dalle abitudini consuete in aula ed erano determinate da accordi più o meno espliciti con il proprio docente, la storia di classe. Il suo compito era di risolvere i problemi proposti, eventuali commenti erano determinati da una incongruità fra due atteggiamenti: quel che lo studente crede che ci si aspetti da lui (Schubauer-Leoni, 1988, 1989), quel che risponderebbe se fosse libero di optare per una scelta non codificata dalle abitudini scolastiche (Balacheff, 1988).

Questo modo di interpretare il compito è così tradizionale, come testimonia la vetustà delle date delle due citazioni fatte poco sopra (vetustà appositamente scelta), che non riteniamo necessitino altre analisi della metodologia di ricerca in questa fase 3.

Nota. Facciamo ancora una volta notare che abbiamo deciso di non usare numeri con la virgola come dati del problema perché sappiamo che la loro presenza può creare difficoltà nel processo di risoluzione. A noi non interessava l'abilità nel risolvere problemi, ma il tipo di interpretazione che gli allievi avrebbero dato al testo e la conseguente risoluzione adottata.

Tutti i protocolli così raccolti in ciascuna delle 3 fasi venivano inviati ai due autori del presente articolo per l'analisi dei risultati (par. 8) e per dare dunque risposte alle precedenti domande di ricerca (par. 9), insieme alla trascrizione dei commenti e delle domande degli insegnanti e alla trascrizione dei colloqui avuti con gli studenti.

8. Risultati della ricerca

8.1. Risposte relative alla Fase 1: Risoluzione dei problemi da parte dei ricercatori

Dei 6 ricercatori che hanno collaborato alla ricerca,

- due risolvono i problemi 1 e 2 secondo la tipologia di risposta 1 (quella che abbiamo definito contrattuale);
  - o uno di essi, risolve secondo la stessa tipologia anche il problema 3 e non risolve il 4 dichiarando di ritenerlo "uguale al 3";
  - o l'altro risolve anche il 3 secondo la tipologia di risposta 2 (quella che abbiamo definito creativa); una volta analizzato il 3, ha un ripensamento su 1 e 2 che dichiara esplicitamente, senza però cambiare le risoluzioni di 1 e 2 ma evidentemente mettendole in dubbio;
- tre risolvono i problemi secondo la tipologia creativa;
- uno risolve i problemi 1, 3 e 4 secondo la tipologia creativa; tenta di farlo anche nel caso del problema 2, ma non si accorge che possono essere acquistati 2 barattoli da 3 litri e uno da 4 per un totale di 10 litri, e sceglie dunque di acquistare 2 barattoli da 4 litri e uno da 3 per un totale di 11 litri (dichiarando che così il protagonista della storia avrà un litro in più a sua disposizione).

Si noti solo come l'effetto "immaginare obblighi impliciti" si presenta perfino fra i ricercatori i quali non ne sono immuni.

8.2. Risposte relative alla Fase 2: Risoluzione dei problemi da parte di docenti di scuola primaria

Gli insegnanti di scuola primaria oggetto della ricerca sono stati in totale 38, di diverse regioni italiane. Di questi 38:

- 19 risolvono tutti i 3 o 4 problemi secondo la modalità contrattuale;
- 8 risolvono il problema 1 secondo la modalità creativa e i problemi 2, 3 e 4 secondo la modalità contrattuale;
- 4 risolvono i problemi 1 e 2 secondo la modalità creativa e i problemi 3 e 4 secondo la modalità contrattuale;
- 7 risolvono tutti i problemi assegnati loro secondo la modalità creativa.

Come faremo anche in seguito, NON teniamo conto degli errori di calcolo o altro; per esempio, nel caso del problema 2 vi sono vari errori di calcolo, ma noi consideriamo solo la modalità di risoluzione (contrattuale vs creativa).

Note. Evidenziamo qui di seguito alcune dichiarazioni scritte di insegnanti o affermazioni che sono state fatte oralmente ai ricercatori e che questi hanno diligentemente trascritto.

- Alcuni insegnanti segnalano che il problema 4 è identico al 3: esprimono l'idea che si sia trattato di un errore nell'impostazione della ricerca.
- Diversi insegnanti chiedono quali devono essere le modalità di risoluzione; per esempio: "Bisogna scrivere i dati?"; "Ma posso scrivere quel che voglio?"; "Dove posso fare i calcoli?"; "I problemi 3 e 4 sono uguali, è una presa in giro?".
- Un insegnante chiede che cosa deve fare, se deve risolvere i problemi proposti.
- Un insegnante chiede un foglio in bianco "per poter scrivere la brutta copia".
- Relativamente spesso la risoluzione del problema 2 è accompagnata da riflessioni sulla vernice acquistata in più, "utile per ritocchi" (e cose simili); si tratta di una sorta di giustificazione dell'acquisto di più dei 10 litri necessari.
- Due insegnanti prima eseguono tutti i calcoli dei problemi 1 e 2 secondo la modalità contrattuale; poi scrivono che non è necessario fare i calcoli e che si può comprare la frutta in banchi diversi (modalità creativa, ma in entrambi i casi senza calcoli).
- Diversi insegnanti che risolvono i problemi 3 e/o 4 con modalità contrattuale, alla fine segnalano però che si potrebbe anche "cambiare strada alla rotonda" o "andare dritto".
- Due insegnanti fanno parecchi calcoli, ma non danno la risposta, offrendo al collaboratore alla ricerca solo i calcoli; essendo tali calcoli del tipo contrattuale, li abbiamo inseriti nel primo gruppo.

- Un protocollo interessante è quello di un insegnante che prima esegue i calcoli del problema 1 con modalità contrattuale, poi scrive che "non si può obbligare uno a effettuare le compere nello stesso negozio", come se nel testo fosse espresso questo obbligo.
- Lo stesso capita a un altro insegnante che protesta contro il fatto che si costringa il ragazzo protagonista dei problemi 3 e 4 a percorrere una sola strada, che "nessuno vieta di cambiare strada".
- Ancora più interessante è la richiesta seguente: "Ma lo devo risolvere come un problema?" (si riferisce al problema 1); il collaboratore alla ricerca chiede: "In che senso?"; "Se lo devo risolvere come problema la risoluzione è questa (e mostra la modalità contrattuale), ma se lo devo fare davvero, se vado al mercato davvero, allora no".
- Inoltre: "Non darei mai questi problemi ai miei alunni, non sono problemi veri". Con frasi diverse, ma di significato analogo, ne abbiamo raccolte diverse, a volte esplicite (almeno 4), altre volte non palesi.

Notiamo che solo in un caso un insegnante nota che c'è una certa differenza fra i problemi 3 (colorato) e 4 (bianco/nero) e che forse questa differenza potrebbe aiutare i bambini a dare "la risposta giusta" (che però non viene indicata).

8.3. *Risposte relative alla Fase 3: Risoluzione dei problemi da parte di allievi di V primaria*

Gli allievi di scuola primaria soggetto della ricerca sono stati in totale 306, di diverse regioni italiane.

Ricordiamo ancora che NON teniamo conto degli errori di calcolo o altro del genere; consideriamo solo la modalità di risoluzione (contrattuale vs creativa) così come si evince dai protocolli.

Il problema 2 si rivela di difficile comprensione da parte degli allievi; molti non lo risolvono ma, spesso, chi ci prova fa calcoli a caso, di difficile interpretazione. Di questi 306 studenti:

- 24 non risolvono alcun problema
- 12 risolvono i problemi 1 e 3 e/o 4 con modalità creativa
- 89 risolvono i problemi 1 e 3 e/o 4 con modalità contrattuale
- 18 risolvono solo il problema 1 con modalità creativa
- 84 risolvono solo il problema 1 con modalità contrattuale
- 12 risolvono solo i problemi 3 e/o 4 con modalità creativa
- 19 risolvono solo i problemi 3 e/o 4 con modalità contrattuale
- 20 risolvono tutti i problemi proposti ma con modalità contrattuale
- 5 risolvono tutti i problemi proposti con modalità creativa
- 14 risolvono il problema 1 con modalità creativa, il 2 con modalità

contrattuale e il 3 e/o il 4 con modalità contrattuale

- 9 risolvono il problema 1 con modalità contrattuale, il 2 con modalità contrattuale e il 3 e/o il 4 con modalità creativa.

Note 1. Evidenziamo qui di seguito alcune dichiarazioni fatte oralmente dagli studenti ai collaboratori alla ricerca e che questi hanno diligentemente trascritto.

> I bambini pongono moltissime domande sulle modalità da mettere in atto: Dobbiamo fare come a scuola? Dobbiamo scrivere anche i dati? Dobbiamo fare il disegno? Ma dobbiamo fare il problema matematico o davvero? Ma io posso andare davvero al mercato? (Questa domanda è stata fatta da un bambino che ha poi risolto 1 e 2 con modalità creativa); …

Note 2. Evidenziamo qui di seguito alcune particolarità che i due autori hanno rilevato nei protocolli degli studenti.

- Riscontriamo moltissimi errori nella risoluzione, molti non sensi; esempio: si effettua l’addizione di tutti i dati numerici che appaiono nel testo sia del problema 1 sia del 2 e il risultato viene proposto come risposta ai problemi; talvolta appaiono anche moltiplicazioni a caso (in generale senza risposta finale al problema).
- Appaiono diverse risoluzioni che vengono proposte sotto forma di diagrammi di flusso, nessuna delle quali corretta.
- Appare un eccesso di formalismi: riscrittura dei dati, spesso complessa; scrittura dei dati numerici e dei significati delle parole presenti nel testo, un’inutile e ingombrante messa in scena che è evidentemente stata concordata con l’insegnante e che certo non solo non aiuta nella risoluzione del problema, ma la impedisce; di solito il lavoro dei bambini termina con questo apparato, come se essi ritenessero che in questo consiste la risoluzione dei problemi. Attività di questo genere sono già state ampiamente denunciate come estremamente negative e controproducenti in D’Amore (2014).
- Appaiono moltissime scritture di calcoli senza alcun senso.
- Si nota un uso disinvolto del segno di uguaglianza in moltissimi protocolli. Faremo vedere alcuni esempi di seguito. La cosa è talmente diffusa che riteniamo sia accettata dagli insegnanti.

Ricordiamo che nel par. 10 proporremo alcuni esempi di protocolli.

9. Risposte alle domande di ricerca

Sulla base dei risultati ottenuti, diamo risposta (Rn) alle domande di ricerca (Dn) ($1 \leq n \leq 8$) formulate nel par. 6.

D1. I docenti sono più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativo)? I docenti ritengono che la riposta 1 sia più corretta, consona, logica della 2? Perché? Se, discutendo eventualmente con il collaboratore alla ricerca, concordano sul fatto che sia più consona alla domanda la risposta 2 piuttosto della 1, faranno ricorso all'idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta?

R1. I docenti si sono rivelati più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativa). I docenti ritengono per lo più che la 1 sia la risposta più coerente con la prassi scolastica usuale. Nessun docente fa ricorso all'idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta.

D2. Nei problemi 1 e 2, qual è la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi? Nei commenti degli allievi, alcuni di essi metteranno in evidenza le differenze fra le risposte 1 e le 2? Se sì, con quali motivazioni? Appare tra queste ultime qualcuna che si possa ascrivere alla ineluttabilità del comportamento scolastico che segue il contratto didattico? Si è deciso di non fare interviste, ma di accettare comunque il colloquio con gli allievi che lo propongano spontaneamente.

R2. Nei problemi 1 e 2, la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi è quella contrattuale. Solo in pochissimi commenti degli allievi sono state messe in evidenza le differenze fra le risposte 1 (contrattuali) e le 2 (creative), come abbiamo visto nel par. 9. In questi pochissimi casi, le motivazioni sono di aderenza a modelli di problemi usuali in aula; dunque hanno sempre a che fare con il comportamento scolastico condizionato dal contratto didattico.

D3. Se ci sono, quali sono le specificità, nei sensi precedenti, del problema 3 rispetto ai precedenti? La risposta 1 è più presente rispetto a quanto avvenuto nei problemi 1 e 2? Se sì, perché?

R3. Il problema 3 offre una situazione grafica immediatamente analizzabile; dunque ci si aspettava più risposte di tipo 2 (creative); tuttavia, moltissimi studenti preferiscono eseguire (o, meglio, ritengono di dover eseguire) le addizioni che portano alle misure delle lunghezze delle singole strade, non a risolvere il problema (con un atto di assunzione di responsabilità nell'interpretazione della domanda). A partire dalle risposte degli allievi è immediato constatare che lo studente considera che questo atteggiamento sia consono all'abitudine legata al contratto didattico (forse addirittura consistente in accordi espliciti) concordato con l'insegnante circa la modalità di risoluzione dei problemi: eseguire tutte le operazioni possibili con i dati a disposizione. Questo fatto è rinforzato da quanto dichiarato nel par. 8, quando si osserva la notevole quantità di bambini-risolutori che scrivono operazioni a caso, pur di usare tutti i dati numerici contenuti nel testo.

D4. Nel testo del problema 3 è fornita una mappa della situazione descritta nel testo; ci sono due versioni dal punto di vista cromatico: una mappa di colori diversi (come quella vista all'inizio di questo testo) e una monocromatica (come quella che segue). Chiameremo problema 4 il problema 3 nel quale il testo si mantiene identico ma la mappa proposta è in bianco e nero (Figura 2). Abbiamo ipotizzato che il colore unico utilizzato per contrassegnare le due strade possa avere più influenza nel far scegliere all'allievo la risposta 2 (creativa) piuttosto che la 1 (contrattuale); cioè abbiamo ipotizzato che le risposte di tipo 2 siano più presenti nel disegno monocromatico. Corrisponde questa ipotesi a verità empirica statisticamente significativa?

R4. I risultati mostrano che tale ipotesi è errata. Le due mappe vengono considerate identiche o, almeno, equisignificanti.

D5. Ad alcuni allievi vengono proposti i problemi in diversi ordini; ad alcuni allievi viene proposto come primo il problema 4 (cioè quello nella versione monocromatica), e poi uno solo dei o entrambi i problemi 1 e 2. Nel caso in cui al problema 4 lo studente dia la risposta 2 (creativa), questo modifica le risposte ai problemi 1 e 2, rispetto a quel che propongono gli altri allievi? Cioè: lo studente ripensa alle risposte date ai problemi 1 e 2, passando da risposte di tipo 1 (contrattuale) a risposte di tipo 2 (creativo)? Quali ipotesi si possono fare al riguardo? Si può pensare a una "rottura del contratto didattico" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018)?

R5. I risultati mostrano che il caso ipotizzato in D5 non si rileva fra i risolutori studenti mentre era stato avvertito, ma in misura minima evidenziata, fra i risolutori insegnanti.

D6. In seguito a esperienze compiute nelle loro classi, ci sono docenti che accettano i problemi proposti come cdr più vicini al concetto di realtà? O ci sono posizioni negative in merito? Riconosce il docente che l'interpretazione della domanda dei problemi 1 e 2 ha a che fare con l'idea di realtà?

R6. Le dichiarazioni e i commenti spontanei di alcuni (pochi) docenti fanno riferimento a "situazioni vere", a "spese vere", anche se mai vengono nominati i cdr. Sono assai di più le posizioni negative in merito, dato che i problemi 1 e 2 contravvengono le usuali forme e situazioni proposte nei problemi scolastici diffusi. Alcuni insegnanti, come abbiamo visto, si ribellano all'idea di poter proporre in aula ai propri allievi testi come 1 e 2, considerati non conformi alla prassi abituale.

D7. In generale, qual è l'atteggiamento del docente nei confronti di problemi di questo tipo? Vengono rilevate convinzioni specifiche a questo proposito? Cita spontaneamente contratto didattico e cdr? Appaiono posizioni come quelle descritte in 4.: "… Noi li abituiamo a un certo tipo di problemi …"?

R7. Come abbiamo visto poche righe fa, l'atteggiamento verso l'eventuale uso di problemi di questo tipo è di rifiuto. Nessun insegnante cita né contratto didattico né cdr. Le posizioni descritte nel par. 4 emergono con forza fra gli insegnanti che propongono ai collaboratori alla ricerca delle riflessioni. In verità il numero di insegnanti che propongono riflessioni è basso; accettato di mettersi nei panni di risolutore di problemi pensati per bambini di V primaria, molti degli insegnanti si comportano di conseguenza, secondo una prassi che è considerata abituale e corretta.

D8. Dalle risposte alle domande di ricerca D1-D7, si può concludere l'esistenza di un effetto del contratto didattico che possiamo chiamare "immaginare obblighi impliciti"?

R8. In base a tutto quanto precede, ci pare evidente che esista un effetto del contratto didattico che abbiamo deciso di chiamare "immaginare obblighi impliciti"; esso consiste, da parte dei risolutori, nell'essere disposti a rinunciare a interpretare il senso della richiesta esplicita del problema (sia da parte degli allievi, sia da parte dei docenti) e di far rientrare il compito nelle comuni, diffuse, supposte attese, restituendo il problema in maniera modificata in modo tale cioè che esso aderisca a un modello di problema atteso o usuale. I testi dei problemi vengono dunque riscritti e interpretati per far sì che i supposti "obblighi impliciti" emergano, modificando la semantica dei testi proposti.

Nel testo del problema 1, la prima domanda:

- *Come* è più conveniente fare l'acquisto?

viene trasformata come segue:

- *Dove* è più conveniente fare l'acquisto?

essendo implicito il fatto che sia obbligatorio fare la spesa in uno solo dei due banchi.

Nel testo del problema 2, la prima domanda:

- *Come* gli conviene comprare la vernice?

viene trasformata come segue:

- *Dove* gli conviene comprare la vernice?

essendo implicito il fatto che sia obbligatorio fare la spesa in una sola delle due mesticherie.

Nel testo dei problemi 3 e 4, nella domanda:

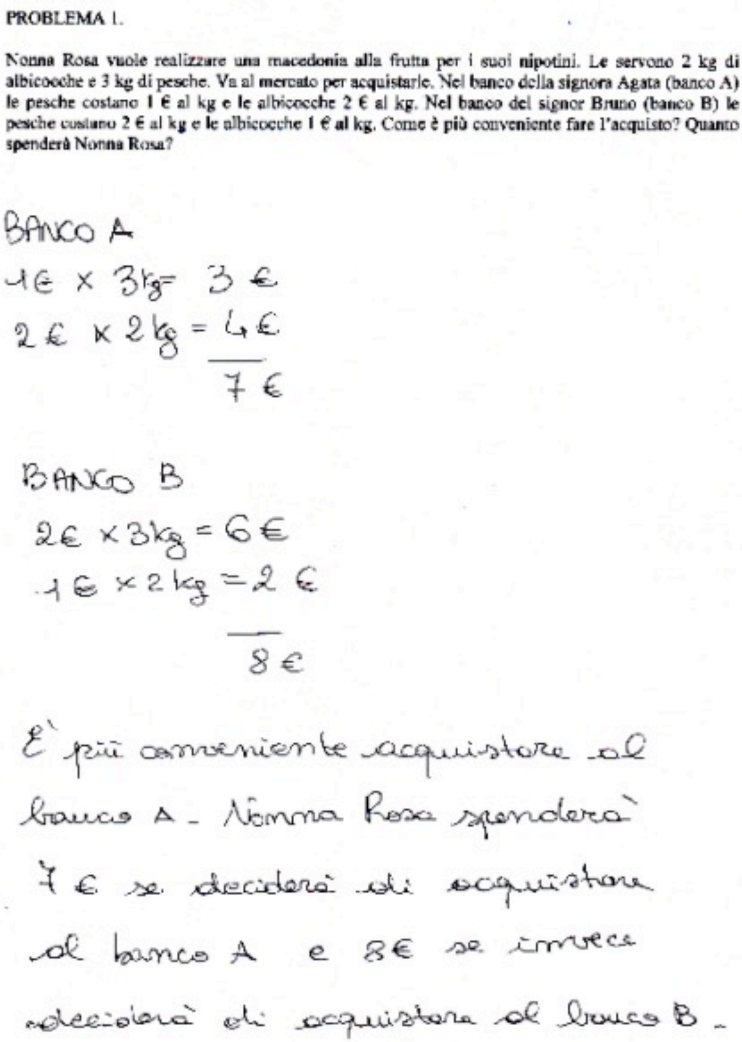
- Quale percorso conviene fare a Pierino?

si considera come implicito il fatto che sia obbligatorio che il percorso avvenga completamente su una stessa strada senza poter immaginare di poter dividere il percorso su due strade diverse, un tratto sull'una e un tratto sull'altra.

Ci sembra evidente che l'effetto "immaginare obblighi impliciti" sia presente con forza, sia presso i docenti che (ancora di più) presso gli studenti.

10. Esempi di protocolli con brevi commenti

Presentiamo di seguito alcuni protocolli di bambini a mo' di esempio. Abbiamo sempre cancellato il nome dell'autore.



PROBLEMA 1.

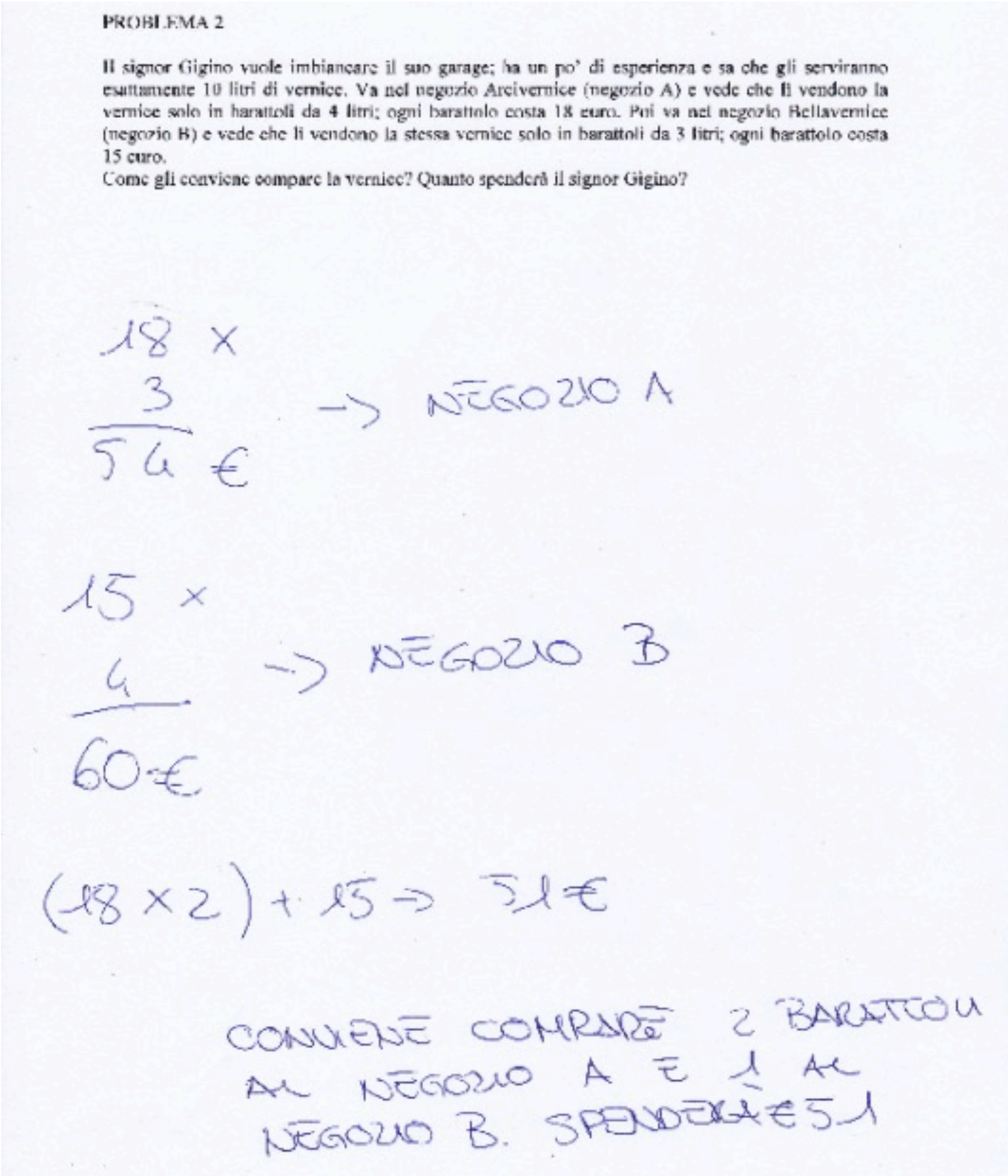
Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

BANCO A
1€ × 3kg = 3 €
2€ × 2kg = 4€
7 €

BANCO B
2€ × 3kg = 6€
1€ × 2kg = 2 €
8 €

È più conveniente acquistare al banco A. Nonna Rosa spenderà 7 € se deciderà di acquistare al banco A e 8€ se invece deciderà di acquistare al banco B.

Figura 3. Esempio di risoluzione del problema 1 con metodologia contrattuale. Si noti la confusione tra € ed €/kg, molto diffusa in tutta la scuola primaria.



PROBLEMA 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che li vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

18 ×
3
54 € → NEGOZIO A

15 ×
4
60 € → NEGOZIO B

(18 × 2) + 15 ⇒ 51 €

CONVIENE COMPRARE 2 BARATTOLI
AL NEGOZIO A E 1 AL
NEGOZIO B. SPENDERÀ € 51

Figura 4. Esempio di risoluzione del problema 2 con metodologia creativa.

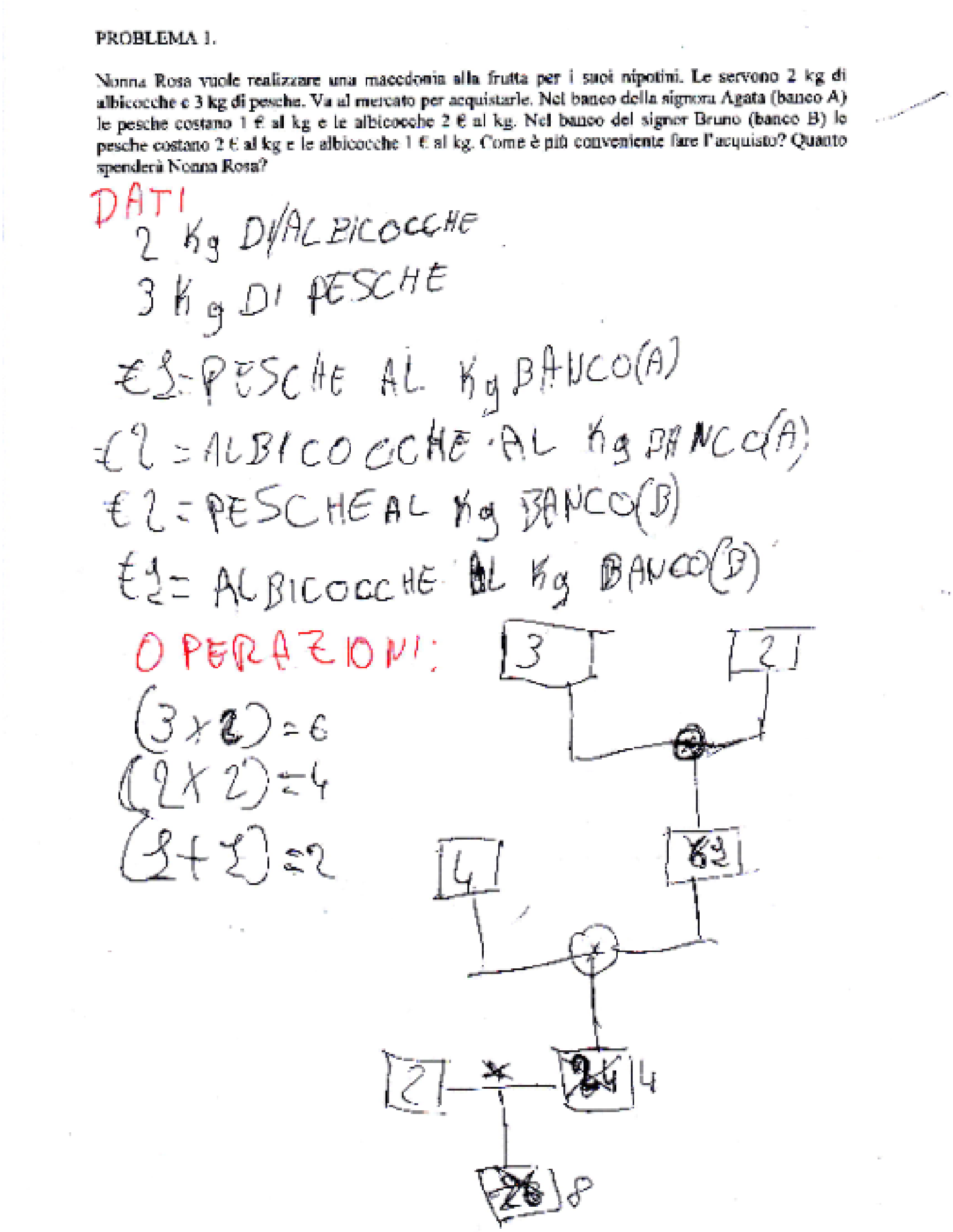
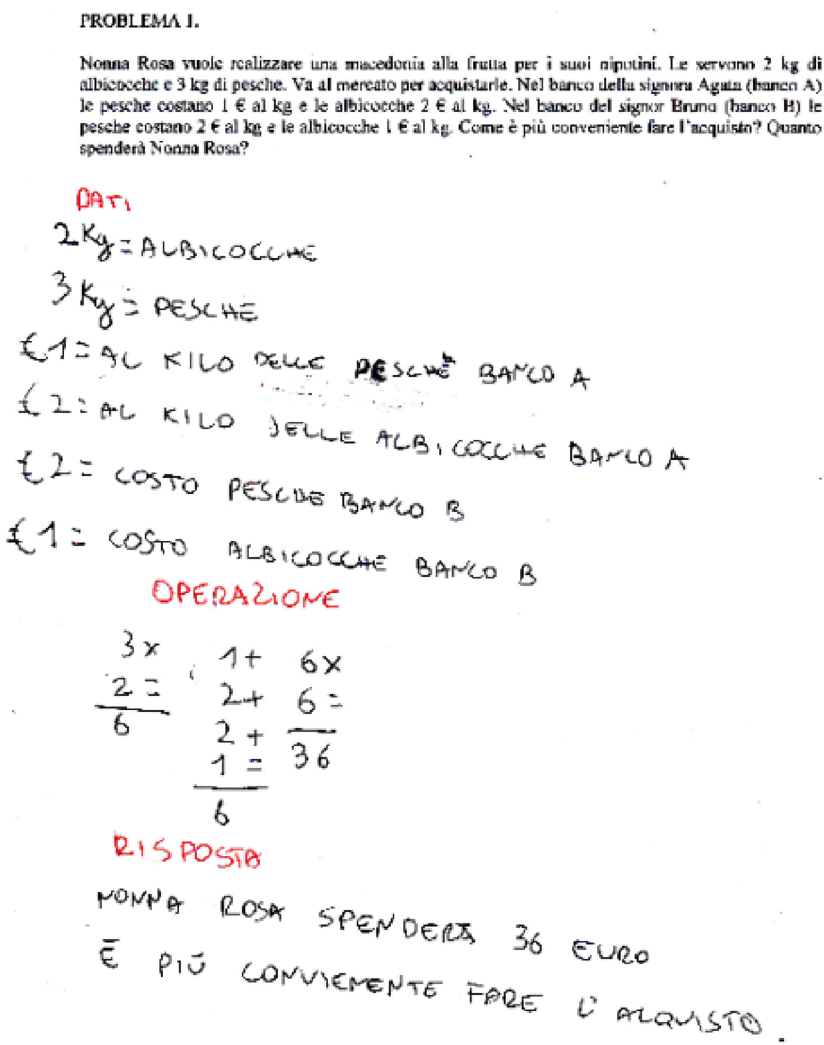


Figura 5. Esempio di risoluzione del problema 1 con l'uso di un diagramma di flusso e calcoli solo parziali. Si noti un uso linguistico e non formale del segno di uguaglianza.


PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

DATI

2Kg = ALBICOCCHE

3 Kg = PESCHE

€1 = AL KILO DELLE PESCHE BANCO A

€2 = AL KILO DELLE ALBICOCCHE BANCO A

€2 = COSTO PESCHE BANCO B

€1 = COSTO ALBICOCCHE BANCO B

OPERAZIONE

3 × 2 = 6

1 + 2 + 2 + 1 = 6

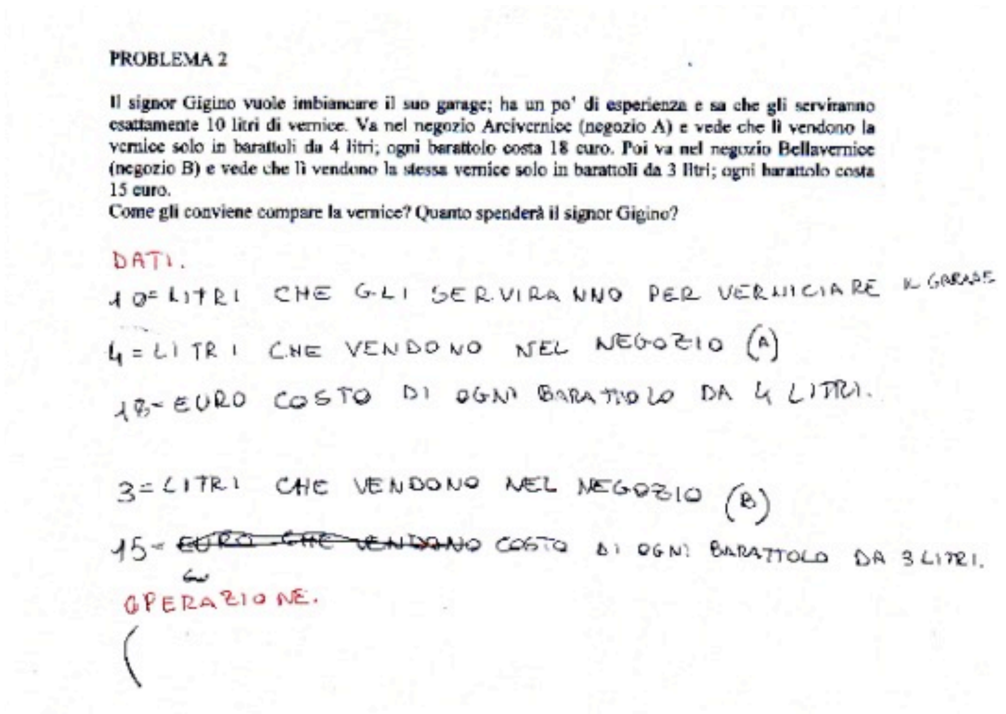
6 × 6 = 36

RISPOSTA

NONNA ROSA SPENDERÀ 36 EURO

È PIÙ CONVIENENTE FARE L'ACQUISTO.

Figura 6. Esempio di risoluzione del problema 1 con calcoli non pertinenti. Si noti l'uso che viene fatto del segno di uguaglianza.



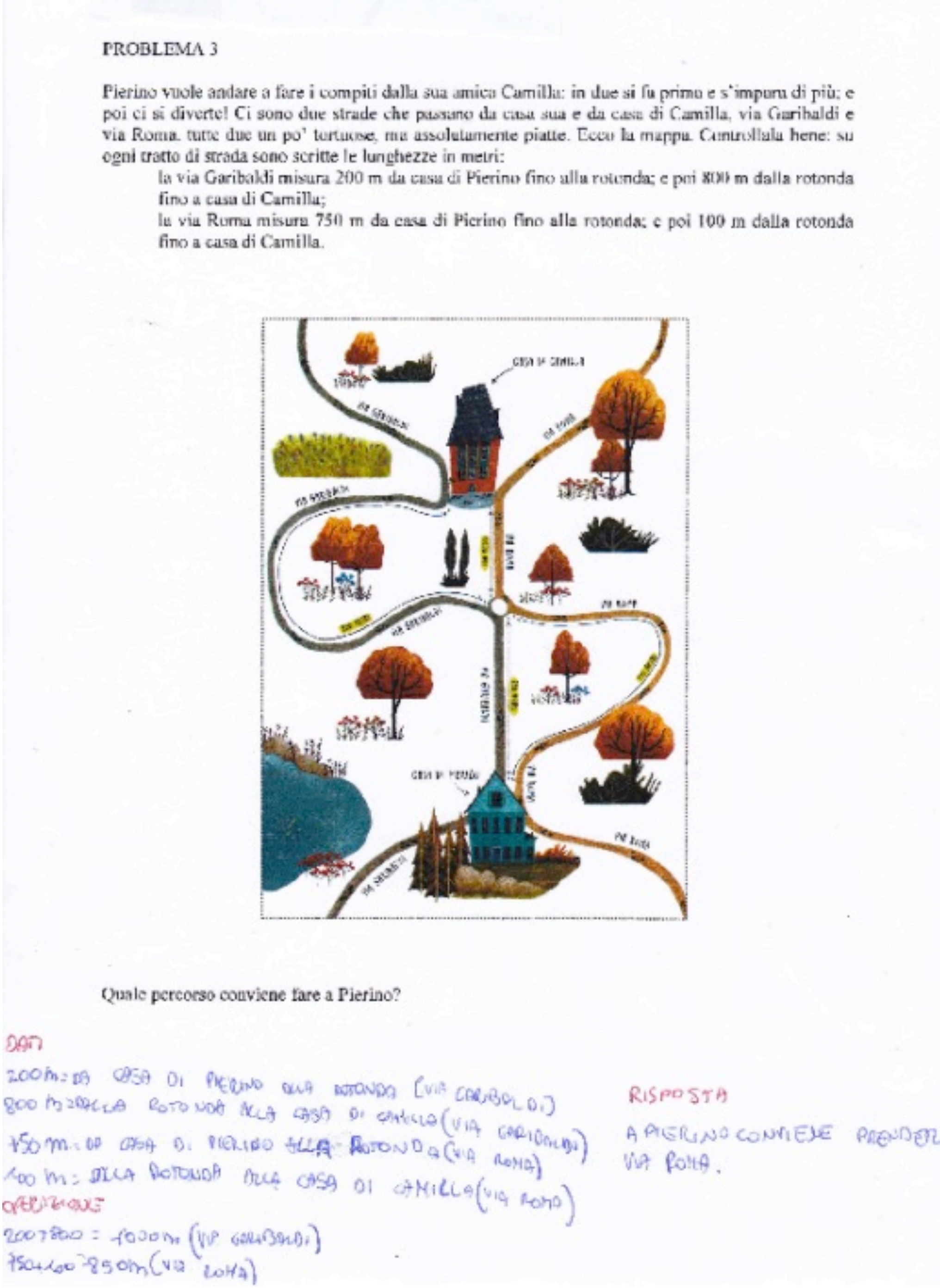
PROBLEMA 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene compare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

DATI.
10= LITRI CHE GLI SERVIRANNO PER VERNICIARE IL GARAGE
4= LITRI CHE VENDONO NEL NEGOZIO (A)
18= EURO COSTO DI OGNI BARATTOLO DA 4 LITRI.

3= LITRI CHE VENDONO NEL NEGOZIO (B)
15= ~~EURO CHE VENDONO~~ COSTO DI OGNI BARATTOLO DA 3 LITRI.
EU
OPERAZIONE.
(

Figura 7. Esempio di risoluzione del problema 2; l’allievo mette in evidenza i dati, ma poi non è in grado di avviare una risoluzione. Si ricordi che non esiste un fattore tempo dato che era stato stabilito che non c’era un tempo limite di consegna. Si noti ancora l’uso del segno di uguaglianza.



PROBLEMA 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;

la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.

Quale percorso conviene fare a Pierino?

DATI

200 m: DA CASA DI PIERINO ALLA ROTONDA (VIA GARIBALDI)

800 m: DALLA ROTONDA ALLA CASA DI CAMILLA (VIA GARIBALDI)

750 m: DA CASA DI PIERINO ~~ALLA~~ ROTONDA (VIA ROMA)

100 m: DALLA ROTONDA ALLA CASA DI CAMILLA (VIA ROMA)

OPERAZIONI

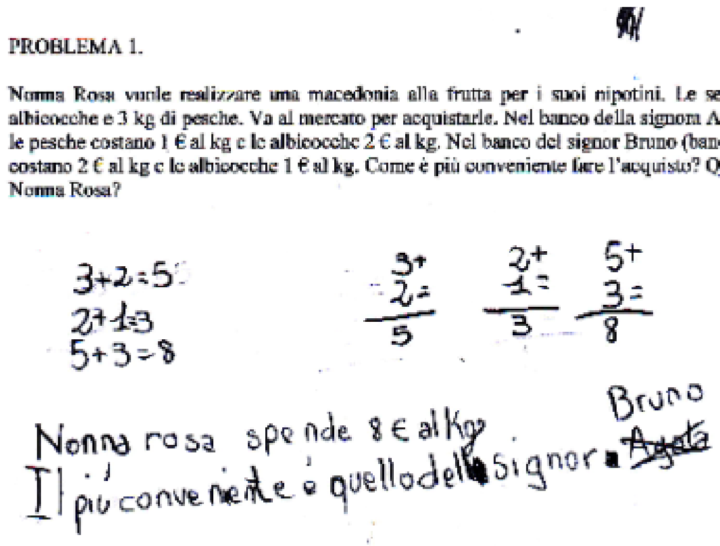
200+800 = 1000 m (VIA GARIBALDI)

750+100 = 850 m (VIA ROMA)

RISPOSTA

A PIERINO CONVIENE PRENDERE VIA ROMA.

Figura 8. Esempio di risoluzione del problema 3 con metodologia contrattuale. Si noti ancora l'uso del segno di uguaglianza.


PROBLEMA 1.

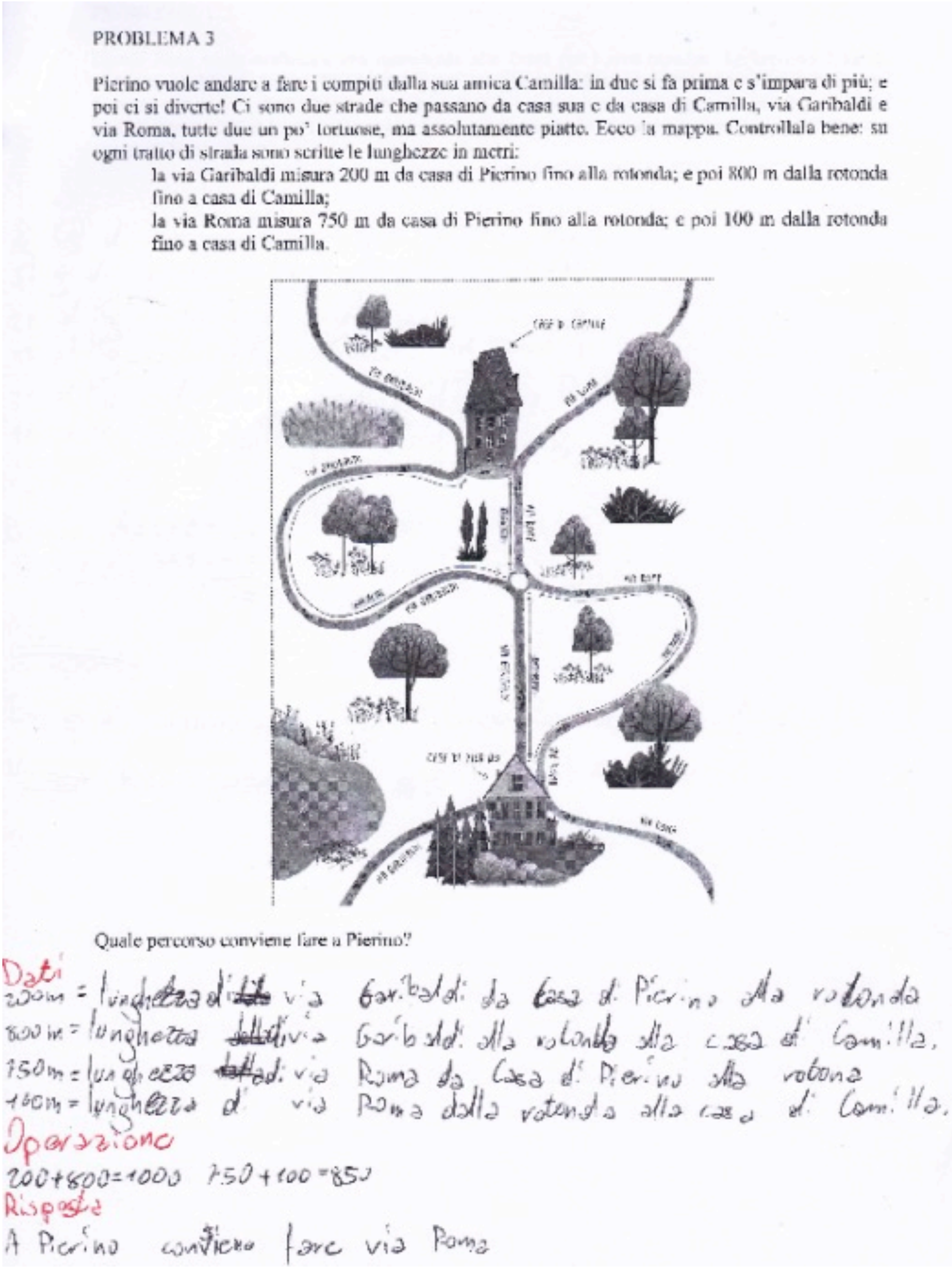
Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

3+2=5
2+1=3
5+3=8

3+ 2= 5 | 2+ 1= 3 | 5+ 3= 8

Nonna rosa spende 8 € al Kg.
Il più conveniente è quello della signor ~~Agata~~ Bruno

Figura 9. Tentativo di risoluzione del problema 1 di tipo contrattuale con operazioni non chiare.



PROBLEMA 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;

la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.

Quale percorso conviene fare a Pierino?

Dati
200m = lunghezza di via Garibaldi da casa di Pierino alla rotonda
800 m = lunghezza ~~della~~ via Garibaldi dalla rotonda alla casa di Camilla.
750m = lunghezza ~~della~~ di via Roma da casa di Pierino alla rotona
100m = lunghezza di via Roma dalla rotonda alla casa di Camilla.
Operazione
200+800=1000 750+100=850
Risposta
A Pierino conviene fare via Roma

Figura 10. Altro esempio di risoluzione di tipo contrattuale del problema 3. Si noti l'uso del segno di uguaglianza.

PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Dati

3=kg di pesche che gli ~~servono~~ serve per fare la macedonia

2=kg di albicoche che gli serve per fare la macedonia

Operazione

~~3x1=3 2x2=4 3+4=7~~ 3x1=3 3+2=5

~~3x2=6 2x1=2 6+2=8~~ 1x2=2

Risposta

~~Gli conviene di andare a fare l'acquisto nel banco della signora Agata perchè li costa solo 7euro e nel banco B deve usare 8 euro.~~

Gli conviene di fare l'acquisto sia nel banco A e sia nel banco b perchè nel banco A le pesche ~~sono più~~ costono di meno e nel banco b le albicocche costano meno.

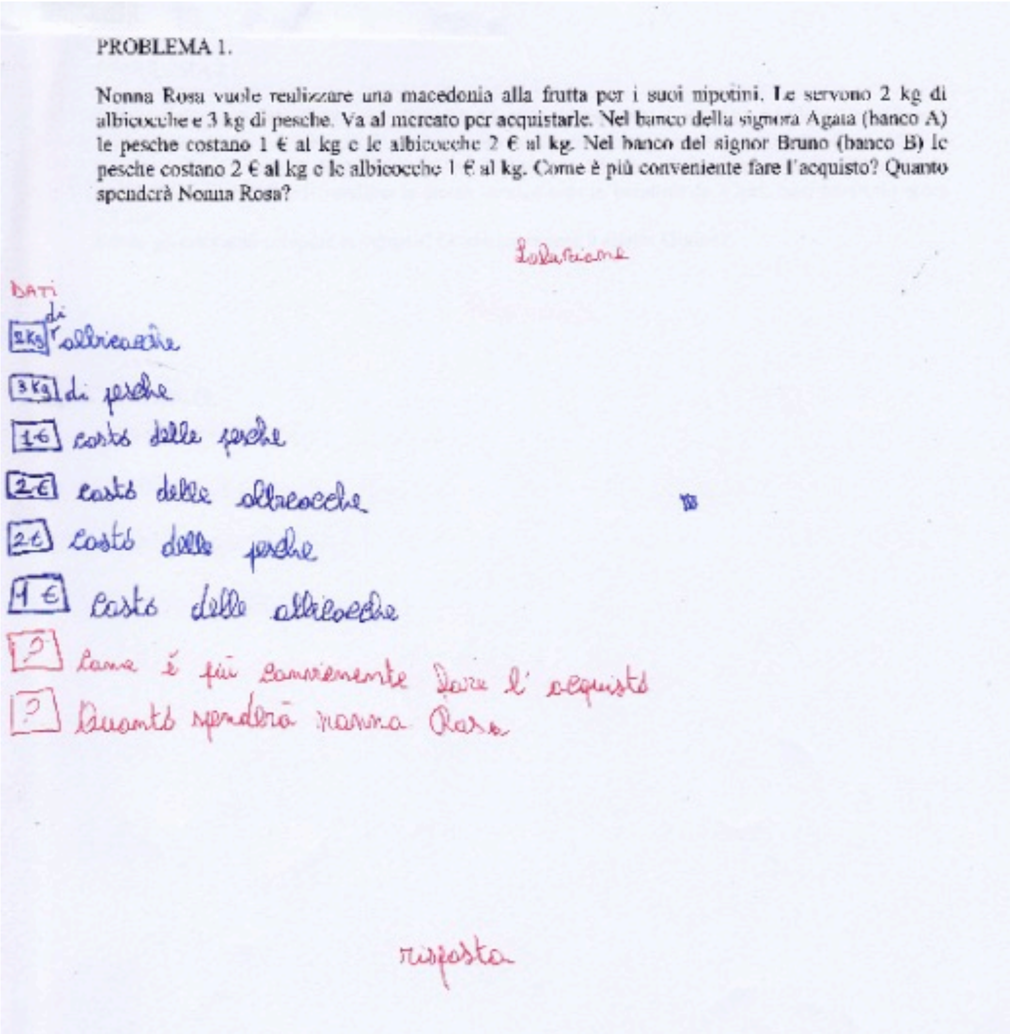
Figura 11. Risoluzione del problema 1 con metodologia creativa. Si noti il solito uso del segno di uguaglianza.

PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

~~DATI~~ OPERAZIONE: (2+3+2+1)= 8 SPESA DI NONNA ROSA

Figura 12. Risoluzione del problema 1 mediante l'apparente somma dei dati numerici presenti nel testo. Questo caso è frequente.


PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Soluzione

DATI

2kg di albicocche

3kg di pesche

1€ costo delle pesche

2€ costo delle albicocche

2€ costo delle pesche

1€ costo delle albicocche

? come è più conveniente fare l'acquisto

? Quanto spenderà nonna Rosa

risposta

Figura 13. Approccio alla risoluzione del problema 1; l'allievo costruisce l'apparato richiesto di tutti i dati presenti nel testo, ma si limita a questo.

Tutti i protocolli sono concretamente disponibili alla visione di chi volesse prenderne atto.

11. Conclusioni

Appare evidente l'influenza di vari fattori che descrivono la conduzione della risoluzione di problemi matematici da parte di bambini di V primaria. Di seguito ci limiteremo a richiamare ancora, esplicitandoli, alcuni punti che emergono da questa ricerca.

1. Presenza dell'effetto del contratto didattico che abbiamo chiamato "immaginare obblighi impliciti" che abbiamo descritto lungo il corso del testo e che costituisce il nucleo centrale del presente lavoro. Di esso sono succubi non solo gli studenti, ma anche un decisamente interessante numero di docenti.

2. Necessità di riesaminare il senso dei cosiddetti cdr nella pratica scolastica. Abbiamo già detto che i cosiddetti cdr non devono essere svolti in modo autonomo; essi devono proporre invece attività da svolgersi secondo modalità che costituiscano occasione di discutere, organizzare e pianificare risoluzioni, discutere, situazioni concrete reali, simulare la realtà e trattarla con strumenti matematici. Noi abbiamo approfittato della ricerca descritta per richiamare l'attenzione dei docenti su un possibile significato di realtà all'interno di un problema di tipo concreto, cioè poter acquistare merce in luoghi diversi approfittando dei diversi costi. Abbiamo considerato cioè i nostri come testi prototipici che illustrano situazioni concrete reali, specifiche dei cdr.

3. Esistenza di evidenti accordi forse espliciti sulle attese formali degli insegnanti; fra tutti, segnaliamo solo i seguenti:

- trascrivere in maniera talvolta assillante tutti i dati numerici e talvolta le loro interpretazioni;
- necessità di far uso di strumenti formali come i diagrammi di flusso anche a scapito della spontaneità.

Noi riteniamo che questo eccesso di richieste formali, all'inizio pensate per fornire un aiuto agli studenti in eventuale difficoltà nell'organizzare logicamente la risoluzione di un problema, finisce con l'allontanare lo studente stesso dalla lettura critica del testo del problema e dalla sua risoluzione. Lo studente finisce con il ritenere che la positività del suo elaborato consista nell'effettuare questi passi formali, richiesti dall'insegnante, con precisione. La risoluzione passa in secondo piano; anzi, talvolta, non è nemmeno più considerata necessaria.

4. Si rileva una mancanza di abitudine nel proporre testi di problemi una componente dei quali sia la necessità di fare una scelta e non solo una sequenza ordinata di calcoli. Per esempio, abbiamo visto che molti studenti, la grande maggioranza, ritiene che non sia lecito effettuare la spesa in due negozi diversi, o percorrere un percorso cambiando la strada a un certo punto, se questo non è chiaramente permesso magari in modo esplicito. Certo, è una delle caratteristiche interpretative che stanno alla base dell'effetto "immaginare obblighi impliciti". Ci è sembrato molto interessante notare

come anche diversi insegnanti rivelino questa tendenza (per esempio quando chiedono al collaboratore alla ricerca se questo sia lecito), il che ci spinge a considerare sempre più il fattore che spinge lo studente a ipotizzare le attese del proprio insegnante come suo scopo e compito principali.

Ringraziamenti

Gli autori del presente articolo ringraziano:

- Anna Angeli, Mariamonica Cappelli, Margherita Francini, Ines Marazzani, Annarita Monaco e Malvina Nurrito, membri del NRD di Bologna, per la professionale e attenta collaborazione alla conduzione della ricerca;
- Miglena Asenova, Maura Iori e Giorgio Santi, membri del NRD di Bologna, per le preliminari letture critiche a precedenti versioni di questo testo e per i suggerimenti proposti;
- Sergio Vastarella per le informazioni fornite sul tema cdr;
- i due gentili e anonimi referee per i preziosi suggerimenti forniti.

Riferimenti bibliografici

Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., Sbaragli, S., & Villa, O. (2009). *Ostacoli epistemologici e didattici: Influenze delle convinzioni degli insegnanti sulla formazione concettuale degli studenti* (I e II parte). Poster esposto nel *V colloque sur la recherche dans les HEP: Formation et pratiques d'enseignement en questions*. Locarno, Svizzera, 23–24 aprile 2009.

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume: Deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique* (pp. 15–26). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *9*(9), 48–93.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: Convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 165–190.

D'Amore B., Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo: Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43–51.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018a). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 247–291.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018b). Relectura de un artículo publicado en

2000: ¿Qué queda?, ¿Qué perspectivas se alcanzaron?, ¿Qué metas son aún lejanas? In A. Avila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática: 30 años de investigación en la revista* Educación Matemática (pp. 63–82). México: Sociedad Méxicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C. SOMIDEM.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en educación matemática*. Prólogo y epílogo de Guy Brousseau. Bogotá: Magisterio.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 22–39.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica: Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson. [Traduzione in lingua spagnola: Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, 62, 51–58.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell’insegnante della dimensione semio-cognitiva dell’apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato di ricerca in Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica). Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo. Disponibile da:
http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Tesi%20PhD%20Maura%20Iori.pdf

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3
https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-016-9726-3

Iori, M. (2018). Teachers’ awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5
https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9808-5

Jaworski, B. (1998). The centrality of the researcher: Rigor in a constructivist inquiry into mathematics teaching. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 112–127.

Knijnik, G. (2018). ¿Donde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas, 21 anños después. In A. Avila (Ed.). *Rutas de la Educación Matemática: 30 años de investigación en la revista Educación Matemática* (pp. 52–62). México: Sociedad Méxicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C. SOMIDEM.

MIUR. (2015, 13 febbraio). *Circolare Ministeriale n. 3: Adozione sperimentale dei nuovi modelli nazionali di certificazione delle competenze nelle scuole del primo ciclo di istruzione*. Disponibile da:
http://www.istruzione.it/allegati/2015/CM_certificazione_comp_primo_ciclo000

1.pdf
Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.
Schubauer-Leoni, M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: La situation de test revisitée. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître* (pp. 251–264). Cousset: Delval.
Schubauer-Leoni, M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: obstacles et conflits* (pp. 350–363). Ottawa: Agence d'Arc.